Der Charakterisierungssatz für das clique-bewachte Fragment der Prädikatenlogik

Seminar Logik, Komplexität, Spiele: Guarded Logics WS 2010/2011
RWTH Aachen
logic.rwth-aachen.de

Nikolas Breuckmann - 06. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung entstand im Rahmen des Seminars „Logik, Komplexität, Spiele: Guarded Logics“im Wintersemester 2010/11 am Lehr- und Forschungsgebiet Mathematischen Grundlagen der Informatik an der RWTH Aachen. Sie knüpft an die vorangegangene Ausarbeitung „Das bewachte Fragment und die bewachte Bisimulation“von Sebastian Godebauer an. Darin wurde unter anderem das clique-bewachte Fragment CGF der Prädikatenlogik eingeführt und einige einer Eigenschaften erläutert. An dieser Stelle sei noch einmal an dessen Definition erinnert:

> Das **clique-bewachte Fragment der Prädikatenlogik CGF** wird induktiv definiert durch:
>
> 1. Jede relationale Atomformel $Rx_1...x_n$ oder $x_i = x_j$ gehört zu CGF.
> 2. CGF ist geschlossen unter den boolschen Operationen.
> 3. Ist $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ eine Formel in CGF, sind die Formeln $\exists\bar{y}(clique(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{y}))$ und $\forall\bar{y}(clique(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \psi(\bar{x}, \bar{y}))$ ebenfalls in CGF enthalten, vorausgesetzt das $Frei(\psi) \subseteq Frei(clique) = \bar{x} \cup \bar{y}$ gilt.
>
> Wobei $clique(\bar{x}, \bar{y})$ genau dann erfüllt ist, falls $\bar{x}$ und $\bar{y}$ eine Clique im Gaifman-Graph der untersuchten Struktur bilden. Siehe dazu [Gr-tcs01] und [Goder].

Das clique-bewachte Fragment der Prädikatenlogik lässt sich mit Hilfe eines so genannten Charakterisierungssatzes beschreiben. Unter einem Charakterisierungssatz wird in der mathematischen Logik ein Satz verstanden, welcher Aussagen über eine Menge von Formeln macht und dabei eine Verbindung zwischen deren semantischen und syntaktischen Eigenschaften herstellt. Charakterisierungssätze sind wie folgt aufgebaut:

> Ist L die Formelmenge eines logischen Systems und $\Phi \subset L$ eine Untermenge von Formeln, welche alle bestimmte syntaktische Eigenschaften besitzen. Dann besitzt eine Formel $\psi \in L$ eine gewisse semantische Eigenschaft gdw. sie zu einer Formel in $\Phi \subset L$ logisch äquivalent ist.

Φ wird auch ein *Fragment* der Logik L genannt. Beispielsweise ist der Satz von Łoś-Tarsky ein Charakterisierungssatz:

> Eine Formel $\psi \in FO$ bleibt erhalten unter Substrukturen[1] gdw. ψ äquivalent ist zu einer universellen Formel[2].

[1]Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen und aus $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$, sowie $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ folgt, das $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ für alle $\bar{a} \subseteq A$ ist, dann ist ψ erhalten unter Substrukturen.

[2]Eine Formel der Form $\forall x_1...\forall x_n\phi$ mit ϕ quantorenfrei.

Ziel dieser Seminararbeit ist den Charakterisierungssatz für das clique-bewachte Fragment der Prädikatenlogik zu beweisen:

Charakterisierungssatz für CGF. *$\psi \in FO$ ist invariant unter clique-bewachter Bisimulation gdw. ψ zu einer Formel in CGF äquivalent ist.*

Dazu werden zunächst einige Konzepte aus der Modelltheorie eingeführt, welche schließlich für den Beweis in Abschnitt 3 benötigt werden.

2 Modelltheorie

In der Modelltheorie werden mathematische Strukturen mit Hilfe der Methoden der mathematischen Logik untersucht. Dabei sind weniger die einzelnen Modelle von Interesse, sondern vielmehr ganze Modellklassen die bestimmte Sätze erfüllen. Die Konzepte der Modelltheorie sind für den Beweis des Charakterisierungssatzes erforderlich, da sie in Abschnitt 2.4 die Begründung für die Existenz von Strukturen mit günstigen Eigenschaften liefern.

Einschub zu Ordinalzahlen und Kardinalzahlen
In den folgenden Abschnitten werden Ordinalzahlen und Kardinalzahlen benötigt. Eine Ordinalzahl gibt die Position innerhalb einer Aufzählung einer beliebig mächtigen Menge an. Die hier verwendeten Ordinalzahlen sind die von-Neumann-Ordinale, d.h. eine Ordinalzahl β ist ein Vorgänger von α gdw. $\beta \in \alpha$. Des weiteren ist ein Limesordinal eine Ordinalzahl, welche kein direkter Nachfolger einer anderen Ordinalzahl ist. Die Kardinalität einer Menge M sei die kleinste Ordinalzahl κ, für die eine bijektive Abbildung von $\downarrow \kappa$ nach M existiert, wobei $\downarrow \kappa$ die Menge aller Ordinalzahlen kleiner als κ ist. Für eine exakte Definition und weitere Informationen zu dem Thema siehe [Blum] und [Deiser].

2.1 Elementare Substrukturen

Wird das Konzept der elementaren Äquivalenz[3] erweitert und mit dem der Substruktur[4] verbunden, so führt dies auf den Begriff der elementaren Erweiterung. Dieser ist wie folgt definiert.

Definition 2.1. *Sei τ ein Signatur und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Falls für alle Formeln $\psi(\bar{x}) \in FO(\tau)$ und für alle $\bar{a} \subseteq A$ gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$ gdw. $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$, so wird $\mathfrak{A}$ eine **elementare Substruktur** von $\mathfrak{B}$ genannt (im Zeichen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$).*
*Ist $\mathfrak{A}$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}$ auch die **elementare Erweiterung** von $\mathfrak{A}$.*

Man beachte, dass die Forderung an die elementare Substruktur stärker ist als nur elementar äquivalent zu ihrer Erweiterung zu sein, da nicht nur alle Sätze,

[3] $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen elementar Äquivalent (in Zeichen $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), falls $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.
[4] $\mathfrak{A}$ ist eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ (in Zeichen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), falls $A \subseteq B$.

sondern ebenfalls alle Formeln in beiden Strukturen gelten sollen. Aus $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ folgt offensichtlich $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, doch aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ folgt im Allgemeinen nicht die Rückrichtung. Dies soll an folgenden Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel. *Folgende Strukturen besitzen elementar äquivalente Erweiterungen, sind jedoch keine elementare Substrukturen.*

1. *Die additive Gruppe der ganzen Zahlen* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *ist keine elementare Substruktur der additiven Gruppe der rationalen Zahlen* $(\mathbb{Q}, +, 0)$*, da beispielsweise die Formel* $\forall x \exists y\, (x + x = y)$ *von* $\mathbb{Q}$ *erfüllt wird, nicht aber von* $\mathbb{Z}$.

2. *Analog dazu ist der Körper* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ *keine elementare Substruktur des Körpers* $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$*, denn die Formel* $\exists x\, (x \cdot x = 1 + 1)$ *wird von* $\mathbb{R}$ *aber nicht von* $\mathbb{Q}$ *erfüllt.*

Definition 2.2. *Seien* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zwei* τ*-Strukturen und* $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *eine Abbildung.* f *heißt* ***elementare Einbettung*** *(geschrieben als* $f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$*), wenn für alle Formeln* $\phi(\bar{x}) \in FO(\tau)$ *und für alle* $\bar{a} \subseteq A$ *gilt:* $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$ *gdw.* $\mathfrak{B} \models \phi(f(\bar{a}))$.

Eine Möglichkeit elementare Einbettungen zu konstruieren liefert folgende Definition.

Definition 2.3. *Sei* α *eine Ordinalzahl und* τ *eine Signatur.*

1. *Die Folge* $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ *heißt eine* ***Kette*** *von* τ*-Strukturen, falls* $\mathfrak{A}_\gamma \subseteq \mathfrak{A}_\beta$ *für alle* $\gamma < \beta < \alpha$ *gilt.*

2. *Eine Kette heißt* ***elementare Kette****, falls zusätzlich* $\mathfrak{A}_\gamma \preceq \mathfrak{A}_\beta$ *für alle* $\gamma < \beta < \alpha$ *gilt.*

Definition 2.4. *Sei* α *eine Ordinalzahl,* τ *eine Signatur und* $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ *eine Kette von* τ*-Strukturen, dann ist die* ***Vereinigung*** *der Kette* $\mathfrak{A} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ *definiert durch:*

1. *Das Universum von* A *ist* $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$

2. $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ *gdw.* $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}_\beta}$ *für alle* $\beta < \alpha$ *mit* $\bar{a} \in \mathfrak{A}_\beta$.

3. $f^{\mathfrak{A}} = b$ *gdw.* $f^{\mathfrak{A}_\beta} = b$ *für alle* $\beta < \alpha$ *mit* $\bar{a} \in \mathfrak{A}_\beta$.

Nun stellt sich die Frage, ob die Vereinigung einer elementaren Kette eine elementare Erweiterung aller Strukturen der Kette darstellt.

Satz 2.5. *Sei* α *eine Ordinalzahl und* $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ *eine elementare Kette von* τ*-Strukturen, dann ist* $\mathfrak{A} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ *eine elementare Erweiterung von allen* $\mathfrak{A}_\beta$ *mit* $\beta < \alpha$.

Beweis. Sei $\phi(\bar{x})$ aus $FO(\tau)$. Es muss gezeigt werden, dass $\mathfrak{A}_\beta \models \phi(\bar{a})$ gdw. $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$ für alle $\beta < \alpha$ und $\bar{a} \subseteq A_\beta$ gilt.
Beweis durch Induktion über den Formelaufbau. O.B.d.A kann angenommen werden, dass sich ϕ in reduzierter Form befindet.

Sei ϕ zunächst atomar. $f : \mathfrak{A}_\beta^n \to \mathfrak{A}^n, \bar{x}^{\mathfrak{A}_\beta} \mapsto \bar{x}^{\mathfrak{A}}$ ist offensichtlich ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}_\beta^n$ nach $\mathfrak{A}^n$. Schränkt man den Wertebereich auf $Bild(f)$ ein, so wird f zu einem Isomorphismus und es folgt aus dessen Definition $\mathfrak{A}_\beta \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi(f(\bar{a})) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$. Ist die Behauptung für die Formeln ϕ und ψ gezeigt, so erfolgt der Induktionsschritt für $\neg\phi$ und $\phi \vee \psi$ analog.
Angenommen die Behauptung wurde für ψ bereits gezeigt und $\phi = \exists y \psi(\bar{x}, y)$. Angenommen $\mathfrak{A}_\beta \models \phi$, dann existiert ein $b \in A_\beta$, so dass $\mathfrak{A}_\beta \models \psi(\bar{x}, b)$ gilt. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt dann $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{x}, b)$ und somit gilt $\mathfrak{A} \models \exists y \psi(\bar{x}, y)$.
Gilt umgekehrt $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, dann existiert ein $b \in A$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, b)$. Wähle nun ein $\kappa < \alpha$, so dass $b \in A_\kappa$ und $\kappa \geq \beta$ (ein solches κ existiert, da es sich bei $\mathfrak{A}$ um eine aufsteigende Kette von β mit $\beta < \alpha$ handelt). Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{A}_\kappa \models \psi(\bar{a}, b)$ und somit $\mathfrak{A}_\kappa \models \phi(\bar{a})$. Dann gilt aber auch $\mathfrak{A}_\beta \models \phi(\bar{a})$, da $\mathfrak{A}_\beta \preceq \mathfrak{A}_\kappa$. ∎

Definition 2.6. *Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $B \subseteq A$. Konstruiere nun eine Expansion von $\mathfrak{A}$ durch Hinzufügen von Konstanten aus B: $\mathfrak{A}_B := (A, \tau, (b)_{b \in B})$.*

1. *Die Formelmenge $Diag(\mathfrak{A}) := Th(\mathfrak{A}_A)$ heißt **elementares Diagramm** von $\mathfrak{A}$.*
2. *Die Formelmenge $Diag_{at}(\mathfrak{A}) := \{\phi \in Th(\mathfrak{A}_A) \mid \phi$ ist (negiert) atomar $\}$ heißt **atomares Diagramm** von $\mathfrak{A}$.*

Lemma 2.7. *$\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{B}$ eingebettet gdw. eine Expansion $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ existiert, so dass $\mathfrak{B}' \models Diag(\mathfrak{A})$.*

Beweis. Definiere $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, m \mapsto m^{\mathfrak{B}}$. Seien $a, a_1, ..., a_n \in A$, dann ist die atomare Formel $a_1 \neq a_2$ in $Th(\mathfrak{A}_B)$ enthalten und somit ebenfalls $f(a_1) \neq f(a_2) \in Th(\mathfrak{A}_B)$. Sei g ein Funktionssymbol der Signatur τ und $g^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = a$, dann ist somit auch $g(a_1, ..., a_n) = a \in Th(\mathfrak{A}_B)$ und $g^{\mathfrak{A}}(f(a_1), ..., f(a_n)) = f(a)$. Sei R ein Relationssymbol, dann ist $R(a_1, ..., a_n) \in Diag(\mathfrak{A})$ und $(f(a_1), ..., f(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$. Somit ist f eine τ-Einbettung.
Ist umgekehrt $\mathfrak{B} \models Diag(\mathfrak{A})$, dann ist die obige Abbildung f elementar. ∎

Bemerkung 2.8. *Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dann ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gdw. $\mathfrak{B}_A \models Diag(\mathfrak{A})$.*

Satz 2.9. *Sei $\mathfrak{M}$ eine nichtleere Menge von elementar äquivalenten Strukturen. Dann existiert eine Struktur $\mathfrak{B}$, so dass für alle $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ eine elementare Einbettung in $\mathfrak{B}$ existiert.*

Beweis. Zunächst gilt für ein weiteres $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$, dass $\{c_a | a \in A\} \cap \{c_a | a \in A'\} = \emptyset$. Sei $\Phi := \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}} Diag(\mathfrak{A})$.

Behauptung. *Φ ist eine erfüllbare Menge von $\bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}} A \cup \tau$-Sätzen.*

Sei dazu $\Phi_0 = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ eine endliche Teilmenge von Φ. Es darf angenommen werden, dass es Formeln $\phi'_1, ..., \phi'_n$ mit in den Variablen $x_1, ..., x_m$ und Elemente $a_{i,j} \in A_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und $j \in \{1, ..., m\}$ gibt, so dass $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{M}$ und $\phi_i = \phi'_i(c_{a_{i1}}, ..., c_{a_{im}}) \, \forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt.

Daraus folgt, dass der Satz $(\exists x_1, ..., x_m)\, \phi'_1 \wedge (\exists x_1, ..., x_m)\, \phi'_2 \wedge ... \wedge (\exists x_1, ..., x_m)\, \phi'_n$ für $\mathfrak{A}_1$ gilt, da $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_j$ mit $1 \leq i, j \leq n$. Damit ist gezeigt, dass Φ_0 erfüllbar ist. Mit dem Kompaktheitssatz folgt dann die Behauptung.

Sei $\mathfrak{B}'$ ein Modell von Φ und $\mathfrak{B}$ sein τ-Redukt. Aus Lemma 2.7 folgt schließlich, dass jedes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ elementar einbettbar ist in $\mathfrak{B}$. ∎

Satz 2.10. *Jede unendlich große Struktur $\mathfrak{A}$ besitzt beliebig große elementare Erweiterungen.*

Beweis. Nach dem Aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem besitzt $Diag\,(\mathfrak{A})$ beliebig große Modelle, woraus zusammen mit Lemma 2.7 die Behauptung folgt. ∎

2.2 Elementare Amalgamation

Gegeben seien zwei Modelle einer Theorie T genannt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, sowie eine Struktur $\mathfrak{A}$, welche nicht notwendigerweise ein Modell von T sein muss, jedoch in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ eingebettet ist. Der Amalgamationssatz besagt, dass es ein weiteres Modell $\mathfrak{D}$ von T gibt, so dass $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$ eingebettet werden können, wobei die Einbettungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{A}$ übereinstimmen.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{D} & \\ \mathfrak{B} \arrow[ur] & & \mathfrak{C} \arrow[ul] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Amalgamation

Es gibt zwei verschiedene Blickwinkel auf die Amalgamation. Zum einen die konstruktive Sichtweise. Hier wird eine Struktur $\mathfrak{D}$ aufgebaut, indem die Struktur $\mathfrak{A}$ erweitert und deren Erweiterungen amalgamiert werden. Auf diese Weise ist es möglich immer komplexer werdende Modelle zu konstruieren. Später in dieser Arbeit wird die Amalgamation für diesen Zweck benötigt werden.
Die andere Sichtweise geht von der bestehenden Struktur $\mathfrak{D}$ aus und untersucht, auf welche Arten sich eine Unterstruktur $\mathfrak{A}$ erweitern lässt. So ist es in einigen Fällen möglich alle Modelle einer Theorie zu klassifizieren (siehe „stability theory“ in [Hod97]).
Bevor der Satz über die elementare Amalgamation bewiesen werden kann, werden zuvor einige Lemmata benötigt.

Definition 2.11. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und $\bar{a}$ ein Tupel in A. Dann bezeichnet $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} := \bigcap \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}, \bar{a} \subseteq B\}$ die von $\bar{a}$ **erzeugte Substruktur** von $\mathfrak{A}$.*

Sie ist die kleinste Substruktur von $\mathfrak{A}$ die $\bar{a}$ enthält. Auf gleiche Weise lässt sich diese Definition für Untermengen von A erweitern.

Bemerkung 2.12. *Sei τ eine Signatur und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, sowie B eine Teilmenge von A. Definiere nun induktiv die Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmenge von A:*

$$\begin{aligned} B_0 &:= B \\ B_{n+1} &:= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{f \in F^m(\tau)} \{f^{\mathfrak{A}}(b_1, ..., b_m) \mid (b_1, ..., b_m) \in B_n^m\} \end{aligned}$$

Wobei $F^m(\tau)$ die Menge aller m-stelligen Funktionssymbole in τ bezeichnet.
Dann ist $B^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ das Universum von $\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$.

Bemerkung 2.13. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen für eine Signatur τ, $\bar{c}$ ein Tupel von Konstantensymbolen welche nicht τ vorkommen, $\bar{a} \subset A$ ein Tupel mit $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_{\bar{a}}$ sowie $\mathfrak{B}_{\bar{b}}$ seien $\tau(\bar{c})$-Strukturen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für jede Formel $\phi(\bar{x}) \in FO$ gilt: $\mathfrak{A}_{\bar{a}} \models \phi(\bar{c}) \Rightarrow \mathfrak{B}_{\bar{b}} \models \phi(\bar{c})$.*
2. *Es existiert eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ mit $f(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Lemma 2.14. *Sei τ eine Signatur, T eine τ-Theorie und $\phi(\bar{x}) \in T$. Sei außerdem $\bar{c}$ ein Tupel mit paarweise verschiedenen Konstanten, welche nicht in τ enthalten sind. Dann folgt aus $\phi(\bar{c}) \in T$, das auch $\forall \bar{x} \phi(\bar{x}) \in T$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und ein Modell von T. Wegen $\phi(\bar{c}) \in T$ ist $\mathfrak{A}_{\bar{c}}$ ein Modell von $\phi(\bar{c})$. Da dies für alle Tupel von Konstanten $\bar{c}$ gilt ist $\mathfrak{A}_{\bar{c}}$ ein Modell von $\forall \bar{x} \phi(\bar{x})$. Da $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von T war, folgt somit die Behauptung. ∎

Lemma 2.15. *Seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zwei τ-Strukturen, sowie $\bar{b} \in B$ und $\bar{c} \in C$ Tupel gleicher Stelligkeit. Außerdem gelte $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{c}}$ und es existiert ein Isomorphismus $f : \mathfrak{A} := \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}} \xrightarrow{\sim} \langle \bar{c} \rangle_{\mathfrak{C}}$ mit $f(\bar{a}) = \bar{c}$, dann gilt $\mathfrak{B}_A \equiv \mathfrak{C}_{f(A)}$.*

Beweis. Da f ein Isomorphismus ist mit $f(\bar{a}) = \bar{c}$ lässt sich o.B.d.A. annehmen, das $\bar{a} = \bar{c}$ gilt, da sonst zu einer isomorphen Kopie von $\mathfrak{C}$ übergegangen werden kann. Es ist dann f die Identität auf $\mathfrak{A}$. Sei nun $\phi(a_1, ..., a_n) \in FO(\tau \cup A)$ ein beliebiger Satz über der erweiterten Signatur $\tau \cup A$, wobei o.B.d.A. angenommen werden kann, dass $\tau \cap A = \emptyset$ ist. Wegen $\langle \bar{c} \rangle_{\mathfrak{C}} = \langle \bar{c} \rangle_{\mathfrak{B}}$, gibt es dann nach Bemerkung 2.12 für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ einen geschlossenen Term t_i über der Signatur $\tau \cup \bar{a}$, so dass $[|a_i|]^{\mathfrak{B}_A} = [|a_i|]^{\mathfrak{A}_A} = [|a_i|]^{\mathfrak{C}_A} = [|t_i|]^{\mathfrak{C}_{\bar{a}}}$ gilt. Wir konstruieren nun die Formel $\phi \in FO(\tau \cup \bar{a})$ aus ϕ, indem für $i = 1, ..., n$ alle Vorkommen von a_i in ϕ durch t_i ersetzen. Nach Voraussetzung gilt dann $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{C}_{\bar{a}} \models \psi$ gilt. Also gilt auch $\mathfrak{B}_A \models \phi$. ∎

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D} & \\
\mathfrak{B}, \bar{a} \arrow[ur, "\preceq"] & & \mathfrak{C}, \bar{c} \arrow[ul, "\preceq_f"'] \\
 & \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}} \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq_g"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Elementare Amalgamation

Satz 2.16 (Elementare Amalgamation)**.** *Seinen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ τ-Strukturen und $\bar{a} \subset B$ und $\bar{c} \subset C$ zwei Tupel gleicher Länge, so dass $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{c}}$ gilt. Dann existiert eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{B}$ und eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$ mit $f(\bar{c}) = \bar{a}$.*

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{A} := \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{B}}$. Aus $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{c}}$ folgt mit Lemma 2.13, dass es eine eindeutige Einbettung $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ gibt, so dass $g(\bar{a}) = \bar{c}$ gilt. Es lässt sich o.B.d.A annehmen, dass $\bar{a} = \bar{c}$ und $B \cap C = \bar{a}$ gilt, da sonst zu einer Struktur übergegangen werden kann, welche diese Bedingungen erfüllt und zu $\mathfrak{C}$ isomorph ist. Daher gilt ebenfalls $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{a}}$.
Sei $T := Diag(\mathfrak{B}) \cup Diag(\mathfrak{C})$.

Behauptung. *T ist erfüllbar.*

Um dies zu zeigen betrachte eine endliche Teilmenge T_0 von T. Definiere nun die Formel $\psi(\bar{a}, \bar{c}')$ als die Konjunktion aller $Diag(\mathfrak{C})$-Sätze die in T_0 vorkommen, also $\psi(\bar{a}, \bar{c}') := \bigwedge (T_0 \cap Diag(\mathfrak{C}))$, wobei $\bar{c}'$ ein Tupel aus paarweise verschiedenen Konstanten aus C ist, welche nicht in A vorkommen.
Angenommen T_0 ist nicht erfüllbar. Da $\mathfrak{B}_B \models T_0 \cap Diag(\mathfrak{B})$ gilt, folgt $Diag(\mathfrak{B}) \models \neg\psi(\bar{a}, \bar{c}')$. Da nach Voraussetzung $A = B \cap C$ ist und in $\bar{c}'$ keine Elemente aus A enthalten sind gilt $\bar{c}' \cap B = \emptyset$. Daher folgt mit Bemerkung 2.14: $Diag(\mathfrak{B}) \models \forall \bar{x} (\neg\psi(\bar{a}, \bar{x}))$ und somit $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \models \forall \bar{x} (\neg\psi(\bar{a}, \bar{x}))$. Zusammen mit der Bemerkung zu Beginn das $\mathfrak{B}_{\bar{a}} \equiv \mathfrak{C}_{\bar{a}}$ gilt, folgt das $\mathfrak{C}_{\bar{a}} \models \forall \bar{x} (\neg\psi(\bar{a}, \bar{x}))$ und damit $\mathfrak{C}_{\bar{c}} \models \neg\psi(\bar{a}, \bar{c})$, im Widerspruch zu $\psi(\bar{a}, \bar{c}') \in Diag(\mathfrak{C})$.
Da T_0 beliebig war folgt mit dem Kompaktheitssatz die Erfüllbarkeit von T und damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei die τ-Struktur $\mathfrak{D}^+$ ein Modell von T und $\mathfrak{D}$ dessen τ-Redukt. Wegen $\mathfrak{D}^+ \models Diag(\mathfrak{B})$ kann aufgrund von Lemma 2.13 angenommen werden, dass $\mathfrak{D}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{B}$ ist und $b^{\mathfrak{D}^+} = b$ für alle $b \in B$ gilt. Definiere die Abbildung $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}^+$ durch $f(d) = d^{\mathfrak{D}^+}$ für alle $d \in C$. Dann folgt ein weiteres mal aus Lemma 2.13 wegen $\mathfrak{D}^+ \models Diag(\mathfrak{C})$, das f eine elementare Einbettung von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$ ist. Somit ist $f(\bar{c}) = \bar{a}^{\mathfrak{D}^+} = \bar{a}$. ■

Der Satz über die elementare Amalgamation stammt von Roland Fraïssé und ist für die Modelltheorie von großer Bedeutung, denn er liefert die Lösung zu folgendem Problem. Angenommen eine gegebene Struktur $\mathfrak{S}$ besitzt eine echte Substruktur $\mathfrak{A}$ und es soll untersucht werden, wie diese Substruktur in $\mathfrak{S}$ eingebettet ist. Eine Möglichkeit dafür ist es $\mathfrak{A}$ innerhalb von $\mathfrak{S}$ zu Strukturen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. zu erweitern und zu überprüfen, welche Formeln die Elemente von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ verbinden. Dies wird durch die Amalgamation von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ermöglicht.

2.3 Typen

In diesem Kapitel werden Typen eingeführt. Diese können als Verallgemeinerung der aus der Algebra bekannten Minimalpolynome für Ringe verstanden werden, denn sie ermöglichen es gewisse Attribute der Elemente einer Struktur festzustellen oder neue Elemente in einer Struktur einzuführen.
Für die folgenden Definitionen sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\bar{b}, X \subseteq A$ und $\bar{a}$ ein Tupel welches alle Elemente aus X enthält.

Definition 2.17. *Der* ***vollständige Typ von*** $\bar{b}$ ***über*** *X im Bezug auf $\mathfrak{A}$ ist die Menge aller $FO(\tau)$-Formeln $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ mit $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{b}, \bar{a})$.*

Der vollständige Typ von $\bar{b}$ über X im Bezug auf $\mathfrak{A}$ ist demnach eine Beschreibung aller Eigenschaften des Tupels $\bar{b}$, welche durch $FO(\tau \cup X)$-Formeln ausgedrückt werden können. Der vollständige Typ von $\bar{b}$ über X im Bezug auf $\mathfrak{A}$ wird entweder geschrieben als $tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/X)$ oder als $tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/\bar{a})$. Wenn eindeutig ist, auf welche Struktur sich bezogen wird, wird diese nicht mehr explizit erwähnt werden.

Definition 2.18. *Sei $p(\bar{x})$ eine Menge von $FO(\tau)$-Formeln mit freien Variablen aus X und $\mathfrak{B}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$. $p(\bar{x})$ heißt* ***vollständiger Typ über*** *X, falls ein Tupel $\bar{b} \subseteq X$ existiert, so dass $p(\bar{x})$ ein vollständiger Typ von $\bar{b}$ über X ist.*

Bemerkung 2.19. *$p(\bar{x})$ ist ein vollständige Typ von $\bar{b}$ über X gdw. $p(\bar{x}) \cup Th(\mathfrak{A}_X)$ erfüllbar ist.*

Im Folgenden werden Typen als Buchstaben p, q, r geschrieben und falls die $\bar{x}$-Abhängigkeit deutlich gemacht werden soll als $p(\bar{x})$.

Definition 2.20. *Die Untermenge eines vollständigen Typen über X heißt einfach* ***Typ über*** *X.*
Ein Typ über X heißt ***n-Typ****, falls jede seiner Formeln nur $n \in \mathbb{N}$ freie Variablen besitzt. Die Menge aller vollständigen n-Typen $S_n^{\mathfrak{A}}(X)$ wird als* ***Stone-Raum*** *bezeichnet.*

Aus aus der Definition der vollständigen Typen $tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/X)$ folgt, dass für jede Formel $\phi(\bar{x}) \in FO(\tau \cup X)$ entweder $\phi(\bar{x}) \in tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/X)$ oder $\neg\phi(\bar{x}) \in tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/X)$ gilt. Dies ist jedoch für (n-)Typen im Allgemeinen nicht mehr der Fall.

Beispiel. *Sei $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, <)$, $X = \mathbb{N}$ und $p = \{n < x \in FO(<, X) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei Φ eine endliche Teilmenge von $p \cup Th(\mathfrak{Q}_X)$. Dann wird Φ für ein ausreichend groß gewähltes $x \in \mathbb{Q}$ erfüllt. Nach dem Kompaktheitssatz ist somit $p \cup Th(\mathfrak{Q}_X)$ erfüllbar und p ein 1-Typ.*

Definition 2.21. *Ist p ein Typ über X, dann wird p durch eine Struktur $\mathfrak{A}$* ***realisiert****, falls $p \subseteq tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/X)$ für ein Tupel $\bar{b} \subseteq A$.*

Beispiel. *Seien $\mathfrak{Q}$ und X wie im vorherigen Beispiel gewählt und $q := \{\phi(x) \in FO(<, X) \mid \mathfrak{Q} \models \phi\left(\frac{1}{2}\right)\}$. Beispielsweise ist die Formel $x < 1$ in q, nicht jedoch $1 < x$. Für jede $(<, X)$-Formel $\phi(x)$ gilt entweder $\mathfrak{Q} \models \phi\left(\frac{1}{2}\right)$ oder $\mathfrak{Q} \models \neg\phi\left(\frac{1}{2}\right)$. q ist demnach ein vollständiger 1-Typ.*

Bemerkung 2.22. *Realisiert eine Struktur $\mathfrak{B}$ einen vollständigen Typen $tp_{\mathfrak{A}}(\bar{b}/X)$, dann ist aufgrund dessen Definition $\mathfrak{B}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$.*

Satz 2.23. *Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $B \subseteq A$ und p ein n-Typ von $\mathfrak{A}$ über B. Dann existiert eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$, so dass p in $\mathfrak{C}$ realisiert ist.*

Beweis. Sei $\bar{b}$ eine Aufzählung der Elemente in von B und $\mathfrak{C}$ ein Modell von von $Th(\mathfrak{A}_{\bar{b}})$, wobei ein Tupel $\bar{c} \subseteq \mathfrak{C}$ existiert mit $\mathfrak{C} \models \{\phi(\bar{c}) \mid \phi(\bar{x}) \in p\}$. Dann gilt $\mathfrak{C}_{\bar{b}^{\mathfrak{C}}} \equiv \mathfrak{A}_{\bar{b}}$. Mit dem Satz über elementare Amalgamation 2.16 folgt, dass es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}$ gibt und eine elementare Einbettung $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ mit $f(\bar{b}) = \bar{b}$. Daraus folgt schließlich $\mathfrak{D}_{\bar{b}} \models \{\phi(\bar{c}) \mid \phi(\bar{x}) \in p\}$. ∎

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern, indem durch mehrfaches Anwenden des Satzes über elementare Amalgamation eine elementare Erweiterung konstruiert wird, so dass alle Typen darin realisiert werden.

Satz 2.24. *Zu jeder τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C}$, in der alle Typen von $\mathfrak{A}$ über A realisiert sind.*

Beweis. Sei $t \subseteq \mathfrak{P}(FO(\tau \cup A))$ die Menge aller Typen von $\mathfrak{A}$ über A. Außerdem sei $(p_\alpha)_{\alpha<|t|}$ eine Aufzählung von t. Sei $\mathfrak{C}_0 := \mathfrak{A}$. Sein nun $\alpha < |t|$ und $\mathfrak{C}_\beta$ für alle $\beta < \alpha$ konstruiert. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{C}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$, also ist p_α als Typ von $\mathfrak{A}$ über $A \subseteq C_\alpha$ ebenfalls ein Typ von $\mathfrak{C}_\alpha$ über A. Demnach gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C}_{\alpha+1} \succeq \mathfrak{C}_\alpha$, so dass p_α in $\mathfrak{C}_{\alpha+1}$ realisiert ist. Für alle Typen p_β mit $\beta < \alpha$ bereits in $\mathfrak{C}_\alpha$ realisiert sind, sind sie es ebenfalls in $\mathfrak{C}_{\alpha+1}$. Ist $\alpha < |t|$ ein Limesordinal, so definiere $\mathfrak{C}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{C}_\beta$. Da $(\mathfrak{C}_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine elementare Kette ist, folgt $\mathfrak{C}_\alpha \succeq \mathfrak{C}_\beta$ für alle $\beta < \alpha$. Damit sind insbesondere alle Typen p_β in $\mathfrak{C}_\alpha$ realisiert.
Schließlich definiere $\mathfrak{C} := \bigcup_{\alpha<|t|} \mathfrak{C}_\alpha$. Dann ist $\mathfrak{C}$ eine elementare Erweiterung für alle bisher konstruierten $\mathfrak{C}_\alpha$ und realisiert somit alle p_α. Insbesondere werden alle Typen von $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}$ realisiert. ∎

Im folgenden Beispiel soll deutlich gemacht werden, wie eine Struktur, die einen bestimmten Typen nicht realisiert, elementar erweitert werden kann, so dass der Typ in ihrer Erweiterung realisiert wird.

Beispiel. *Sei $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, <)$ eine $<$-Struktur und $p(x) := \{n \leq x | n \in \mathbb{N}\}$ ein 1-Typ über der Menge $\mathbb{N}$ im Bezug auf $\mathfrak{N}$. Dann wird $p(x)$ offensichtlich nicht von $\mathfrak{N}$ realisiert. Eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch Einführung eines Elementes ∞ für das $\infty > n$ für*

alle $n \in \mathbb{N}$ gelten soll führt nicht zum Ziel, da die dadurch erhaltene Struktur ein maximales Element besäße, $\mathfrak{N}$ jedoch nicht.
Stattdessen lässt sich die Struktur $\mathfrak{N}^+$ definieren mit Universum $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ..., ..., -2^+, -1^+, 0^+, 1^+, 2^+, ...\}$. Die Relation $<^+$ ordne die Elemente in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}^+$ auf kanonische Weise an und zusätzlich gelte $n < k^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k^+ \in \mathbb{Z}^+$. Wegen $\mathfrak{N}^+ \models p(0^+)$ realisiert $\mathfrak{N}^+$ den Typen $p(x)$. Außerdem gilt: $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}^+$.

2.4 Saturiertheit

Ein saturiertes Modell einer vollständigen Theorie T ist ein großes Modell welches sich dadurch auszeichnet symmetrisch zu sein. Symmetrisch in dem Sinne, dass es eine elementare Erweiterung für kleinere Modelle ist[5], jedoch darüber hinaus keine „unnötigen“Eigenschaften besitzt. Darüber hinaus lässt sich ein saturiertes Modell $\mathfrak{A}$ zu einem Modell jeder Theorie erweitern, welche zusammen mit $Th(\mathfrak{A})$ konsistent ist (siehe [Hod97]).
Saturierte Modelle werden, wie im Kapitel über die elementare Amalgamation bereits angedeutet, durch das Amalgam aller möglichen Modelle einer vollständigen Theorie gewonnen.
Ziel dieses Kapitels ist der Beweis, dass jede Struktur eine saturierte elementare Erweiterung besitzt.

Definition 2.25. *Sei κ eine Kardinalzahl, τ eine Signatur und $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur.*

1. *$\mathfrak{B}$ heißt **κ-saturiert**, wenn für beliebige Mengen $A \subseteq B$ mit $|A| < \kappa$ jeder 1-Typ von $\mathfrak{B}$ über A realisiert ist.*

2. *$\mathfrak{B}$ heißt allgemein **saturiert**, falls $\mathfrak{B}$ $|B|$-saturiert ist.*

Insbesondere heißt ein Modell $\mathfrak{B}$ ω-saturiert, falls jeder 1-Typ von $\mathfrak{B}$ über jeder endlichen Menge $A \subseteq B$ realisiert ist.

Beispiel. *Hier einige Beispiele für ω-saturierte Strukturen:*

1. *Jedes endliche Modell einer Theorie ist ω-saturiert.*

2. *Jedes abzählbare Modell einer Theorie, welche nur atomare Formeln beinhaltet ist ω-saturiert.*

3. *Sei τ eine Signatur, welche nur die Konstantensymbole $c_0, c_1, ...$ enthält und T eine τ-Theorie mit den Formeln $c_i \neq c_j$, wobei $i, j \in \mathbb{N}$. Es gibt bis auf Isomorphie abzählbar viele abzählbare Modelle von T. Für jedes $\kappa \leq \omega$ gibt es ein Modell mit genau κ Elementen, welche keine Konstanten sind. Insbesondere gibt es ein Modell, welches abzählbar viele Elemente, die nicht in τ vorkommen, enthält. Dieses Modell ist ω-saturiert.*

[5]Diese Eigenschaft wird auch Universalität genannt

4. *Sei T die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik 0 (d.h. jede endliche Summe von Einsen ist ungleich 0). Wieder gibt es bis auf Isomorphie abzählbar viele abzählbare Modelle, denn für jedes $\kappa \leq \omega$ gibt es eine Körpererweiterung vom Grad κ über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Der Körper mit Grad ω über $\mathbb{Q}$ ist ω-saturiert.*

5. *$(\mathbb{Q}, <)$ ist ω-saturiert.*

Lemma 2.26. *Ist $\mathfrak{A}$ κ-saturiert und unendlich, dann ist $|A| \geq \kappa$.*

Beweis. Angenommen $|A| < \kappa$. Sei a_ν eine Aufzählung aller Elemente von A. Definiere nun den Typ $p(x) := \{x \neq c_{a_\nu} \mid \nu < |A|\}$.
$p(x)$ ist ein 1-Typ von $(\mathfrak{A}, a_\nu)_{\nu<|A|}$, wird jedoch nicht von $(\mathfrak{A}, a_\nu)_{\nu<|A|}$ realisiert. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\mathfrak{A}$ κ-saturiert ist. ■

Lemma 2.27. *$\mathfrak{A}$ ist endlich gdw. $\mathfrak{A}$ κ-saturiert ist für alle Kardinalzahlen κ.*

Beweis. Angenommen $\mathfrak{A}$ ist nicht endlich, dann ist es laut Lemma 2.26 nicht $|A|^+$-saturiert. Dies zeigt die Rückrichtung.
Für die Hinrichtung sei $\mathfrak{A}$ ist endlich. Sei $X \subseteq A$ und sei $p(x)$ ein Typ von $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$. Angenommen $p(x)$ wird nicht in $\mathfrak{A}$ realisiert, dann existiert für jedes $b \in \mathfrak{A}$ eine Formel $\sigma_b \in p$, so dass $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X} \models \neg\sigma_b$. Somit ist die Menge $\{\sigma_b \mid b \in A\} \subseteq p$ nicht erfüllbar und p somit kein Typ. ■

Für den Beweis des Charakterisierungssatzes wird auf ω-saturierte Modelle zurückgegriffen werden. Die nun folgenden Lemmata und letztlich Satz 2.32 zeigen deren Existenz.

Lemma 2.28. *Sei τ eine Signatur, κ eine Kardinalszahl mit $|\tau| \leq \kappa$ und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ der Größe $|B| \leq |A|^\kappa$, so dass jeder Typ von $\mathfrak{A}$ über einer Menge $C \subseteq A$ mit $|C| \leq \kappa$ in $\mathfrak{B}$ realisiert ist.*

Beweis. Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass es höchstens $|A|^\kappa$ Teilmengen von A gibt, deren Größe höchstens κ ist. Damit gilt folgende Abschätzung für den Stone-Raum: Sei $n \in \mathbb{N}$, $C \subseteq A$ mit $|C| \leq \kappa$, dann gilt $|S^n_{\mathfrak{A}}(C)| \leq |\mathfrak{P}(FO^n(\tau \cup C))| \leq 2^{|\tau|+|C|+n+\omega}$. Im Fall, dass die Mengen C und τ endlich sind, fallen diese durch das ω aus der Betrachtung[6]. Aus der Abschätzung folgt, dass höchstens $\lambda := \omega \times |A|^\kappa \times 2^\kappa$ verschiedene Typen realisiert werden müssen. Sei dazu $(p_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ eine Aufzählung dieser Typen. Das Vorgehen ist nun analog zu dem beim Beweis von Satz 2.24, indem wieder per Induktion eine elementare Kette von elementaren Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, so dass für alle $\beta < \alpha$ der Typ p_β in $\mathfrak{B}_\alpha$ realisiert ist und $|\mathfrak{B}_\alpha| \leq |A|^\kappa$ gilt. Setze im ersten Schritt wieder $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{A}$. Nun sei $\alpha < \lambda$ beliebig und $\mathfrak{B}_\alpha$ bereits konstruiert. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{B}_\alpha \succeq \mathfrak{A}$. Demnach ist p_α als Typ von $\mathfrak{A}$ über einer Menge $C \subseteq A \subseteq B_\alpha$ auch ein Typ von $\mathfrak{B}_\alpha$ über C. Also existiert eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{B}$, so dass p_α in $\mathfrak{B}$ realisiert ist. Insbesondere ist demnach die Formelmenge $p_\alpha \cup Th((\mathfrak{B}_\alpha)_{B_\alpha})$ erfüllbar. Nach dem Satz

[6]Für die Arithmetik von Ordinal- und Kardinalzahlen siehe [Deiser]

von Löwenheim-Skolem hat die Menge $p_\alpha \cup Th((\mathfrak{B}_\alpha)_{B_\alpha})$ ein Modell $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ mit einer Größe von höchstens $|\tau| + |\mathfrak{B}_\alpha| \leq \kappa + |A|^\kappa = |A|^\kappa$. Damit ist $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{B}_\alpha$, so dass p_α in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ realisiert ist. Da p_β für alle $\beta < \alpha$ in $\mathfrak{B}_\alpha$ realisiert sind, sind folglich alle p_β für $\beta < \alpha + 1$ in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ realisiert. Desweiteren gilt $|\mathfrak{B}_{\alpha+1}| \leq |A|^\kappa$.
Ist α ein Limesordinal, so setze $\mathfrak{B}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta$ und es folgt wieder, dass für alle $\beta < \alpha$ $\mathfrak{B}_\beta \preceq \mathfrak{B}_\alpha$ gilt und p_β in $\mathfrak{B}_\alpha$ realisiert sind. Des weiteren gilt, dass $|\mathfrak{B}_\alpha| = |\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta| = \alpha \times |A|^\kappa = |A|^\kappa$ (letzte Gleichung wegen $\alpha \leq |A|^\kappa$).
Setze schließlich $\mathfrak{B} := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{B}_\alpha$. ■

Für den Beweis von Satz 2.32 werden die folgenden Konzepte aus der Mengentheorie benötigt.

Definition 2.29. *Sei α ein Limesordinal und $X \subset \alpha$.*

1. *Die Menge M heißt* ***konfinal*** *in α, falls zu jedem $\beta \in X$ mit $\beta < \alpha$ ein $\gamma \in X$ existiert, so dass $\beta < \gamma$ gilt.*
2. *Die* ***Konfinalität*** *von α (in Zeichen $cf(\alpha)$) bezeichnet die kleinste Ordinalzahl, so dass eine Abbildung $f : cf(\alpha) \to \alpha$ existiert, wobei Bild $(f(\alpha))$ konfinal in α ist.*
3. *α heißt* ***regulär****, falls $cf(\alpha) = \alpha$ gilt.*

Bemerkung 2.30. *Eine unendliche Kardinalzahl α ist regulär, falls sie nicht als von weniger als α Kardinalzahlen geschrieben werden kann, welche alle kleiner als α sind.*

Satz 2.31. *Alle unendlichen Nachfolgerkardinalzahlen sind regulär.*

Beweis. Sei α eine Kardinalzahl und angenommen $cf(\alpha^+) < \alpha^+$. Dann existiert eine Funktion $f : cf(\alpha^+) \to \alpha^+$ und es gilt $\downarrow \alpha^+ = \bigcup_{\beta<\alpha} \downarrow f(\beta)$. Wegen $|f(\beta)| < \alpha^+$ für alle $\beta < \alpha$ gilt $|cf(\alpha^+)| \leq \alpha$ und $f(\beta) \leq \alpha$ für alle $\beta < \alpha$. Daraus folgt $\alpha^+ = |\downarrow \alpha^+| = |\bigcup_{\beta<\alpha} \downarrow f(\beta)| \leq \sum_{\beta<\alpha} \alpha = \alpha$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.
Es muss demnach $cf(\alpha^+) = \alpha^+$ gelten und somit ist α^+ regulär. ■

An dieser Stelle kann der Beweis von Lemma 2.28 erweitert werden, so dass die Behauptung für beliebige Kardinalzahlen κ gilt.

Satz 2.32. *Sei κ eine Kardinalszahl, τ eine Signatur und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ der Größe $|B| \leq |A|^\kappa$, so dass jeder Typ von $\mathfrak{A}$ über einer Menge $C \subseteq A$ mit $|C| \leq \kappa$ in $\mathfrak{B}$ realisiert ist.*

Beweis. Zusammen mit Lemma 2.28 lässt sich wieder eine elementare Kette von τ-Strukturen konstruieren, wobei bei jeder Iteration der Nachfolger alle Typen seines Vorgängers realisiert.
Definiere also zunächst analog zu den vorherigen Beweisen $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{A}$ und bilde

iterativ die elementare Kette $(\mathfrak{B}_\beta)_{\beta<\alpha}$, wobei α ein Limesordinal ist. Für die Limesordinale α sei wieder $\mathfrak{B}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{B}_\beta$. Es folgt der Induktionsschritt, in dem für ein beliebiges $\alpha < \kappa^+$ die elementare Erweiterung $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ von $\mathfrak{B}_\alpha$ gemäß Lemma 2.28 konstruiert wird. Es gilt dann $|B_{\alpha+1}| \leq |B|^\kappa \leq (|A|^\kappa)^\kappa = |A|^{\kappa\cdot\kappa} = |A|^\kappa$.
Setze nun schließlich $\mathfrak{B} := \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathfrak{B}_\alpha$. Dann ist $|B| \leq \kappa^+ \cdot |A|^\kappa \leq 2^\kappa \cdot |A|^\kappa = |A|^\kappa$.

Behauptung. *$\mathfrak{B}$ ist κ^+ saturiert.*

Sei dazu $p \in S^n_{\mathfrak{B}}(C)$ ein vollständiger n-Typ von $\mathfrak{B}$ über C. Es genügt zu zeigen, dass es ein $\alpha < \kappa^+$ gibt, so dass $C \subseteq B_\alpha$. Denn dann wird p per Konstruktion in $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ realisiert und somit erst recht in $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{B}_{\alpha+1}$. Sei nun $f : |C| \to C$ eine Abzählung und $g : C \to \kappa^+$ definiert durch $g(c) := min\{\alpha < \kappa^+ \mid c \in B_\alpha\}$. κ^+ ist eine Nachfolgerkardinalzahl und nach Lemma 2.31 somit regulär. Die Verknüpfung $g \circ f : |C| \to \kappa^+$ ist eine Abbildung von einer Ordinalzahl in κ^+ und es ist $|C| \leq \kappa \leq \kappa^+$. Da κ^+ die kleinste Ordinalzahl ist, deren Bild in κ^+ unbeschränkt ist, folgt das das Bild von $g \circ f$ beschränkt ist in κ^+. Daraus folgt unmittelbar, dass es ein $\alpha < \kappa^+$ mit $(g \circ f)(\beta) \leq \alpha$ für alle $\beta < |C|$ gibt. Da f eine Bijektion ist gilt damit $g(c) \leq \alpha$ für alle $c \in C$ und somit ist $C \subseteq B_\alpha$. ■

Satz 2.32 liefert das nötige Werkzeug, um den Beweis für den Charakterisierungssatz zu führen.

3 Beweis des Charakterisierungssatzes

Satz 3.1 (Charakterisierungssatz für CGF). *$\psi \in FO$ ist invariant unter Clique-bewachter Bisimulation gdw. ψ zu einer Formel in CGF äquivalent ist.*

Beweis. In der Ausarbeitung von Sebastian Goderbauer [Goder] wurde bereits gezeigt, dass Formeln aus CGF invariant unter clique-bewachter Bisimulation sind. Es bleibt die Hinrichtung zu zeigen.
Sei dazu $\psi \in FO$, so dass ψ erfüllbar ist und invariant unter clique-bewachter Bisimulation. Sei $\Phi = \{\phi \in CGF \mid \psi \models \phi\}$. Φ ist also die Menge der clique-bewachten Folgerungen aus ψ. Die Behauptung ist bewiesen falls $\Phi \models \psi$, denn aus dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik folgt, dass bereits eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$ existiert. Dann ist $\psi \equiv \bigwedge \Phi_0 \in$ CGF.

Aus der Erfüllbarkeit von ψ folgt, dass Φ ebenfalls erfüllbar ist. Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von Φ und $T_{CGF}(\mathfrak{A})$ seine CGF-Theorie (d.h. alle Sätze aus CGF für die $\mathfrak{A}$ ein Modell ist).

Behauptung. *$T_{CGF}(\mathfrak{A}) \cup \{\psi\}$ ist erfüllbar.*

Angenommen das Gegenteil wäre der Fall. Dann gäbe es $\phi_1, ..., \phi_n \in T_{CGF}(\mathfrak{A})$, so dass $\psi \models \neg \bigwedge_{i=1}^n \phi_i \in$ CGF. Daraus folgt, dass $\neg \bigwedge_{i=1}^n \phi_i$ ein Element von Φ sein muss. Da $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ ist folgt, dass $\mathfrak{A} \models \neg \bigwedge_{i=1}^n \phi_i$, was im Widerspruch zu $\phi_1, ..., \phi_n \in T_{CGF}(\mathfrak{A})$ steht.

Demnach gibt es eine Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models T_{CGF}(\mathfrak{A}) \cup \{\psi\}$. Seien $\mathfrak{A}^+ \succeq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^+ \succeq \mathfrak{B}$ zwei ω-saturierte elementare Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$.

Behauptung. *$\mathfrak{A}^+$ und $\mathfrak{B}^+$ sind clique-bisimilar.*

Seien dazu X und Y clique-bewachte Teilmengen von A und B, sowie I die Menge aller Isomorphismen $f : X \tilde{\rightarrow} Y$ mit $\mathfrak{A}^+ \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B}^+ \models \phi(f(\bar{a}))$ für beliebige $\phi \in CGF$ und $\bar{a} \subset X$.

Zeige zunächst die Hin-Richtung:
Sei $f : X \tilde{\rightarrow} Y \in I$ und X' eine beliebige, clique-bewachte Menge aus $\mathfrak{A}^+$. Es muss gezeigt werden, dass es eine clique-bewachte Menge $Y' \subseteq B$ und einen partiellen Isomorphismus $g : X' \tilde{\rightarrow} Y' \in I$ gibt, so dass $g|_{X' \cap X} = f|_{X' \cap X}$ gilt.

Definiere zunächst $\bar{a} = X' \cap X$, sowie $\Xi := \{\xi(f(\bar{a}), \bar{y}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \xi(\bar{a}, X' - X)\}$. Für alle $\xi(f(\bar{a}), \bar{y})$ in Ξ gilt, dass $\mathfrak{A}^+ \models (\exists \bar{y}.clique(\bar{a}, \bar{y}))\xi(\bar{a}, \bar{y})$. Aufgrund der Definition von f folgt, dass $\mathfrak{B}^+ \models (\exists \bar{y}.clique(f(\bar{a}), \bar{y}))\xi(f(\bar{a}), \bar{y})$. Ξ ist demnach ein Typ des Tupels $f(\bar{a})$ im Bezug auf $\mathfrak{B}^+$. Da $\mathfrak{B}^+$ ω-saturiert ist, wird Ξ für ein Tupel $\bar{b} \subset B$ realisiert, so dass $\left(f(\bar{a}), \bar{b}\right)$ clique-bewacht ist. Definiere nun $g : X' \tilde{\rightarrow} Y'$ mit $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$ und $g(X' - X) = \bar{b}$.

Die Her-Richtung wird völlig analog bewiesen, wobei die ω-Saturiertheit von $\mathfrak{A}^+$ ausgenutzt wird.

Da $\mathfrak{B}^+$ eine elementare Erweiterung von $\mathfrak{B}$ ist gilt $\mathfrak{B}^+ \models \psi$. ψ ist nach Voraussetzung invariant unter Bisimulation, woraus zusammen mit der obigen Behauptung folgt, dass $\mathfrak{A}^+ \models \psi$. Also gilt insbesondere $\mathfrak{A} \models \psi$ und da $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von Φ war, gilt $\Phi \models \psi$. ■

4 Zusammenfassung

Der Charakterisierungssatz ermöglicht ein tieferes Verständnis der Semantik der Formeln des clique-bewachten Fragmentes der Prädikatenlogik, da er eine enge Beziehung zur Bisimulationsinvarianz herstellt.
Um den Satz zu beweisen wurden in dieser Ausarbeitung zunächst einige Grundbegriffe der Modelltheorie, wie beispielsweise die elementare Äquivalenz, definiert und es wurde versucht deren Eigenschaften an Hand von Beispielen zu verdeutlichen.
Auf dieser Grundlage konnte anschließend die elementare Amalgamation eingeführt werden. Unter Zuhilfenahme einiger Lemmata wurde beweisen, dass unter bestimmten Voraussetzungen für zwei bereits vorhandene Modelle ein größeres Modell existiert, so dass beide darin eingebettet werden können.
Anschließend wurden Typen eingeführt. Diese Mengen von Formeln ermöglichte

es explizit nach großen Strukturen zu suchen, welche diese realisieren. Dabei wurde gezeigt, dass sich solche elementaren Erweiterungen stets finden lassen.
Schließlich wurden saturierte Strukturen eingeführt. Diese erfüllen eine möglichst große Anzahl an Typen. Für den Beweis des Charakterisierungssatzes waren dafür insbesondere die sogenannten ω-saturierten Strukturen von Interesse. Ihre Existenz wurde gezeigt, indem mit Hilfe des bereits erwähnten Satzes zur Existenz von elementaren Erweiterungen, immer größere Modelle amalgamiert wurden.
Der Beweis schließlich benötigte die ω-Saturiertheit, da gezeigt werden musste, dass zwei Modelle clique-bisimilar sind und die Clique-Bisimilarität durch Typen beschrieben werden konnte.

Literatur

[Blum] A. Blumensath *Set Theory*

[Chang] C. Chang und H. Keisler *Model Theory, Elsevier Verlag, 1973*

[Cori] R. Cori und D. Lascar *Mathematical Logic Part II, Oxford University Press, 2000*

[Deiser] O. Deiser *Einführung in die Mengenlehre, Springer Verlag, 2004*

[Goder] S. Goderbauer *Das bewachte Fragment und die bewachte Bisimulation, Seminar Guarded Logics, WS 2010/2011, RWTH Aachen*

[Gr-tcs01] E. Grädel *Guarded fixed point logic and the monadic theory of countable trees, Theoretical Computer Science, vol. 288, pp. 129–152, 2002.*

[Grädel] E. Grädel *Vorlesungsskript zur Modelltheorie*

[Hod97] W. Hodges *A Shorter Model Theory, Cambridge University Press, 1997*

[Marker] D. Marker *Model Theory: An Introduction, Springer Verlag, 2002*